



УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
**ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**
ОСНОВАН В 1930 ГОДУ

Федеральный проект
**ВОЛОНТЁРЫ
ПРОСВЕЩЕНИЯ**

ПОИСК РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ (ПО МАТЕРИАЛАМ ЕГЭ)

**Семенова Ирина Николаевна, доцент института МФИиТ
Слепухин Александр Владимирович, доцент института
МФИиТ**

Цель занятий

Систематизация путей поиска решения задач разных типов (по требованию):
нахождение длины отрезка, нахождение величины угла, доказательство равенства отрезков, доказательство равенства углов, нахождение площадей и их отношений и т.д.

Основа систематизации – установление связи между требованием и теоретическим материалом, то есть поиск конкретного материала для решения задачи

Основные задачи занятий

1. Построение следующей систематизирующей таблицы:

	Основные типы						
	Нахождение длины отрезка	Нахождение величины углы	Доказательство равенства отрезков	Доказательство равенства углов	Нахождение площади и их отношений	Параллельность прямых	Перпендикулярность прямых
Пути поиска решения							

2. Заполнение справочника полезных утверждений, фактов, теорем для решения задач указанных типов.

Занятие 1, 2

Пути решения задач на нахождение длин отрезков

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

1. В прямоугольном треугольнике длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна a , длина биссектрисы, проведенной из той же вершины, равна b . Найти длину медианы, проведенной к гипотенузе.

Задание:

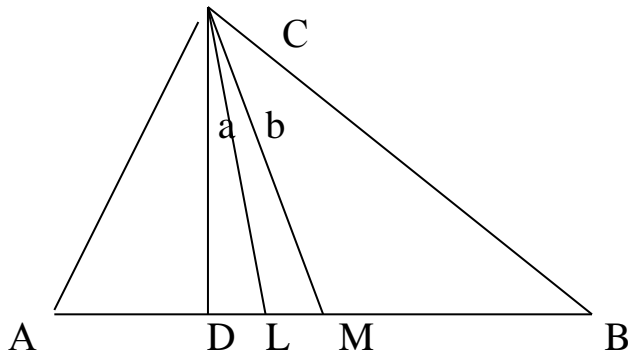
1. Выделить условие и требование.

2. Построить чертеж, на котором отметить условие и требование задачи.

(регламент времени 2 мин.)

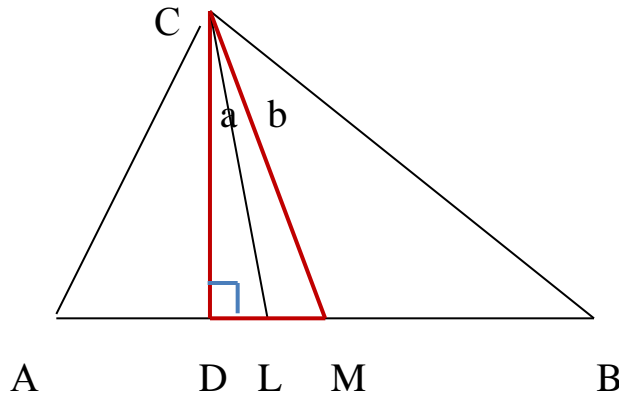
Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

1. В прямоугольном треугольнике длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна a , длина биссектрисы, проведенной из той же вершины, равна b . Найти **длину медианы**, проведенной к гипотенузе. (Требование: найти длины отрезка)



Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

1. В прямоугольном треугольнике длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна a , длина биссектрисы, проведенной из той же вершины, равна b . Найдите длину медианы, проведенной к гипотенузе.



Ответьте на следующие вопросы и выполните задания.

Элементом какого треугольника является отрезок CM ?

Определите вид этого треугольника.

Какие утверждения можно использовать для нахождения стороны этого треугольника?

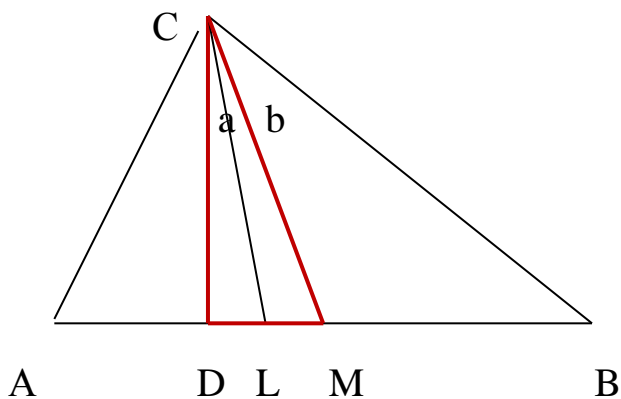
Сравните угол между биссектрисой и высотой, биссектрисой и медианой.

Какой угол можно найти, используя данные в условии задачи?

Закончите решение задачи (*регламент времени 4 мин.*)

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника - теорема Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла

1. В прямоугольном треугольнике длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна a , длина биссектрисы, проведенной из той же вершины, равна b . Найти длину медианы, проведенной к гипотенузе.



Задание: рассмотрите вариант решения, сравните со своим.

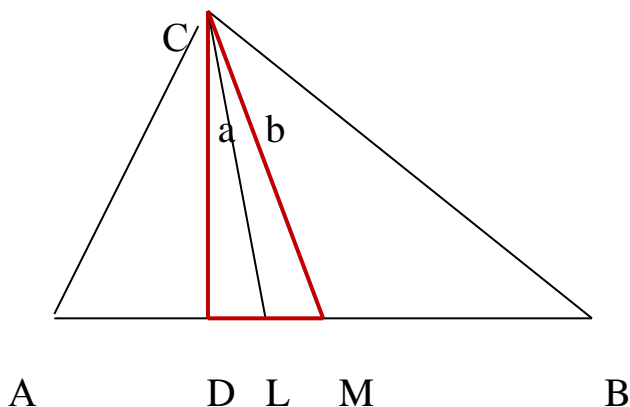
Рассмотрим отрезок CM как элемент прямоугольного треугольника CDM . Тогда $CM = CD / \cos \angle DCM$.

Так как биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой пополам, то можно определить половину $\angle DCM$. Из прямоугольного треугольника CDL $\cos \angle DCL = a / b$. $\cos \angle DCM = 2 \cos^2 \angle DCL - 1 = \frac{2a^2 - b^2}{b^2}$

$$\text{Тогда } CM = \frac{2a^2 - b^2}{b^2}$$

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника - теорема Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла

1. В прямоугольном треугольнике длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна a , длина биссектрисы, проведенной из той же вершины, равна b . Найти длину медианы, проведенной к гипотенузе.



Как догадаться до пути решения:

данные в условии
отрезки и искомый
отрезок являются
элементами одного
треугольника

Фрагмент заполнения таблицы

	Основные типы	
	Нахождение длины отрезка	Нахождение величины угла
Пути поиска решения	Рассмотреть отрезок как элемент прямоугольного треугольника и применить теорему Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла	

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

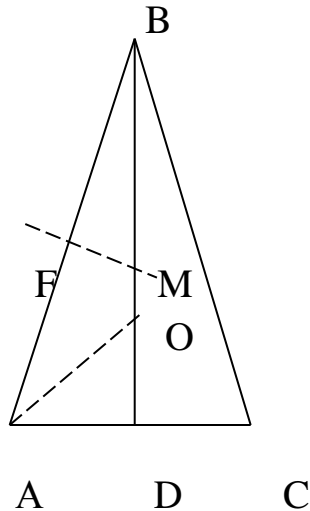
2. В равнобедренном треугольнике с углом α при основании вписана окружность радиуса r . Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Задание:

1. Выделить условие и требование.
2. Построить чертеж, на котором отметить условие и требование задачи (стараясь, включить элементы в одну фигуру) (*регламент времени 2 мин.*)

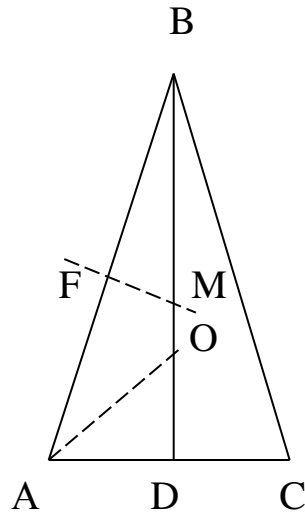
Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

2. В равнобедренном треугольнике с углом α при основании вписана окружность радиуса r . Найти **радиус окружности**, описанной около треугольника. (Требование: найти длины отрезка)



Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

2. В равнобедренном треугольнике с углом α при основании вписана окружность радиуса r . Найти радиус окружности, описанной около треугольника.



Ответьте на следующие вопросы и выполните задания.

Искомый отрезок является стороной какого треугольника? Определите его вид.

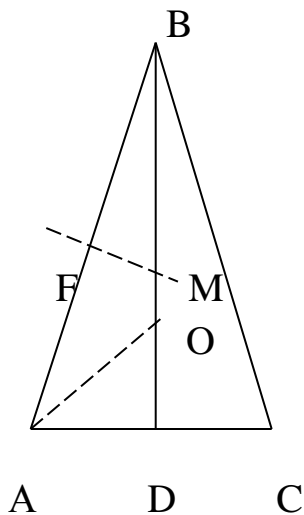
Какие соотношения можно применить к треугольнику такого вида?

Как соотносится элемент(ы) этого треугольника со стороной AB . Также отрезок AB является элементом какого треугольника?

Закончите решение задачи(регламент времени 4 мин.).

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника - теорема Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла

2. В равнобедренном треугольнике с углом α при основании вписана окружность радиуса r . Найти радиус окружности, описанной около треугольника.



Задание: рассмотрите вариант решения, сравните со своим

Найдем длину BM , где M – центр описанной окружности (O – центр вписанной окружности). Для этого рассмотрим треугольник BFM , стороной которого является искомый отрезок. $\angle FBM = 90^\circ - \alpha$ (из $\triangle ABD$). $BM = BF / \cos(90^\circ - \alpha)$.

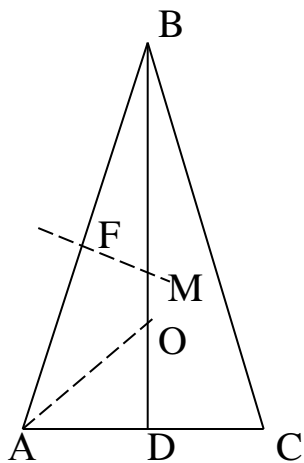
Теперь задача сводится к нахождению половины стороны AB . Рассмотрим $\triangle ABD$, стороной которого является отрезок AB . $AB = AD / \cos\alpha$. В свою очередь отрезок AD найдем из треугольника ADO : $AD = OD \cdot \operatorname{ctg}(\alpha/2) = r \cdot \operatorname{ctg}(\alpha/2)$. Отсюда $AB = r \cdot \operatorname{ctg}(\alpha/2) / \cos\alpha$.

Окончательно имеем:

$$BM = \frac{r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha} = \frac{r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}.$$

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника - теорема Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла

2. В равнобедренном треугольнике с углом α при основании вписана окружность радиуса r . Найти радиус окружности, описанной около треугольника.



Как догадаться:

Достраиваем до прямоугольного треугольника (в нем легче искать стороны), угол которого связан с данным в условии углом.

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

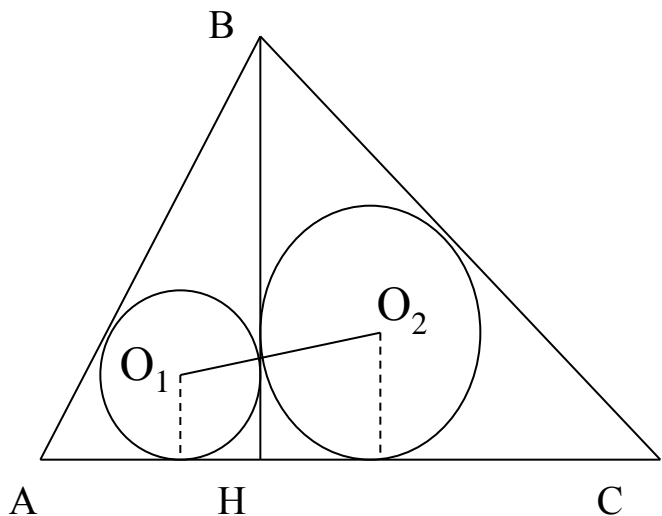
3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ см проведена высота BH . Найти **расстояние между центрами** окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH . (*Требование: найти длины отрезка*)

Задание:

1. Выделить условие и требование.
2. Построить чертеж, на котором отметить условие и требование задачи (*регламент времени 2 мин.*).

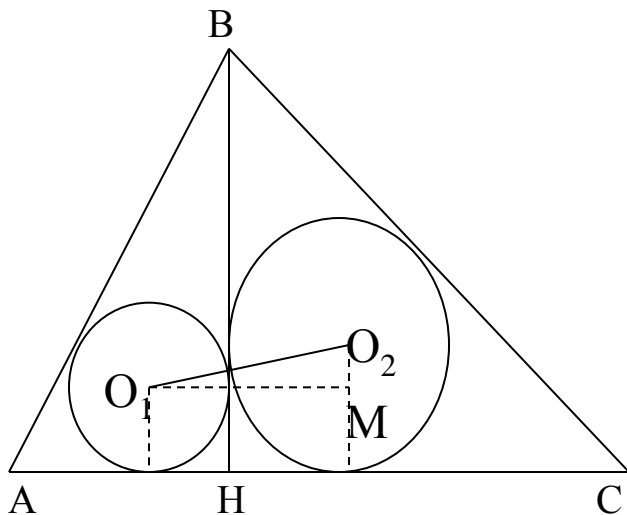
Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ см проведена высота BH . Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH .



Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ см проведена высота BH . Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH .



Ответьте на вопросы и выполните следующие задания

Элементом какого треугольника является искомый отрезок O_1O_2 ?

Определите его вид.

Какие соотношения можно применить к треугольнику такого вида?

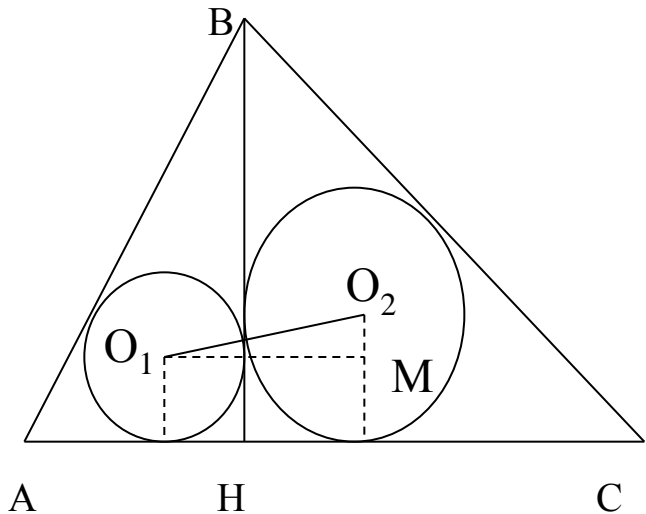
Для того чтобы установить связь r_1 и r_2 с данными в условии задачи величинами, определите вид треугольников ABH , BCH , ABC .

Что можно сказать про соотношение элементов таких треугольников?

Закончите решение задачи (*регламент времени 4 мин.*).

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ см проведена высота BH . Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH .

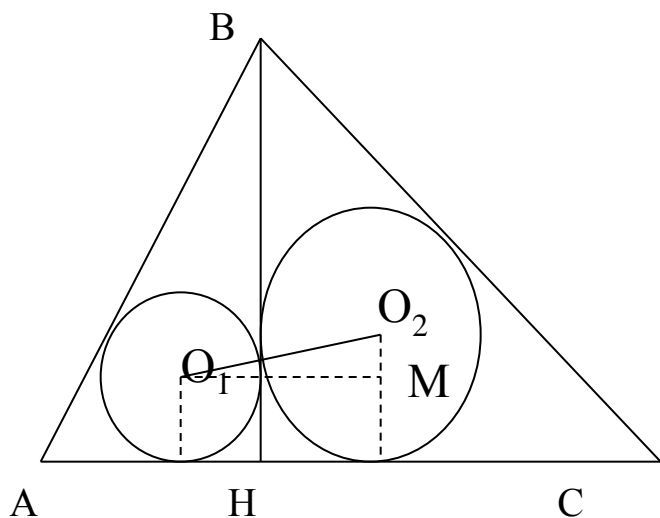


Рассмотрим искомый отрезок O_1O_2 как элемент прямоугольного треугольника O_1O_2M . Обозначим радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH соответственно r_1 и r_2 . Тогда по теореме Пифагора $O_1O_2 = \sqrt{(r_1+r_2)^2 + (r_2-r_1)^2}$
 $= \sqrt{2} \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

Для того чтобы установить связь r_1 и r_2 с данными величинами, вспомним, что в подобных треугольниках (а треугольники ABH , BCH , ABC подобны по двум углам) соответственные элементы (в том числе и радиусы вписанной окружности) пропорциональны

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника - теорема Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ см проведена высота BH. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH.

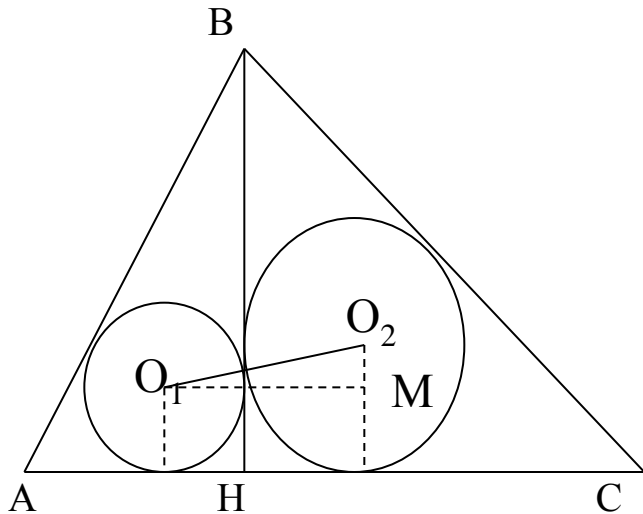


значит $AB / r_1 = BC / r_2 = AC / r = k$, где r – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Отсюда, используя теорему Пифагора, получим $r^2 k^2 + r_2^2 k^2 = r^2 k^2$, $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$
Поэтому

$$O_1O_2 = \sqrt{2} \cdot r = \sqrt{2} \cdot \frac{BC + AC - AB}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{3 + 4 - 5}{2} = \sqrt{2}.$$

Отрезок как элемент прямоугольного треугольника - теорема Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла

3. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB = 3$ и $BC = 4$ см проведена высота BH . Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABH и BCH .



Как догадаться:

отрезок является элементом
единственного прямоугольного
треугольника
(расстояние между центрами не
равно сумме радиусов!)

Отрезок как элемент произвольного треугольника

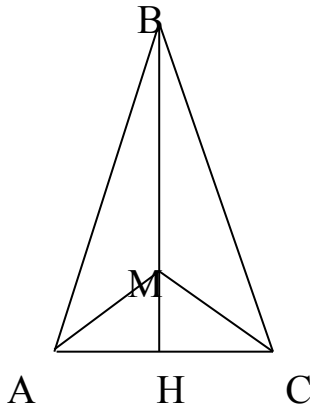
4. На высоте VH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) взята точка M так, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC$. Угол при основании треугольника равен α ($\alpha > 30^\circ$). В каком отношении точка M делит высоту? (*Требование: найти длины отрезков*)

Задание:

1. Выделить условие и требование.
2. Построить чертеж, на котором отметить условие и требование задачи (*регламент времени 2 мин.*)

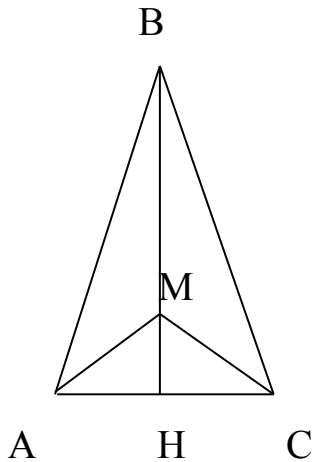
Отрезок как элемент произвольного треугольника

4. На высоте BH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) взята точка M так, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC$. Угол при основании треугольника равен α ($\alpha > 30^\circ$). В каком отношении точка M делит высоту?



Отрезок как элемент произвольного треугольника

4. На высоте BH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) взята точка M так, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC$. Угол при основании треугольника равен α ($\alpha > 30^\circ$). В каком отношении точка M делит высоту?



Ответьте на следующие вопросы и выполните задания:

Элементом какого треугольника является отрезок MH ?

Определите его вид.

Какие соотношения можно применить к треугольнику такого вида?

Элементом какого треугольника является BM ?

Определите его вид.

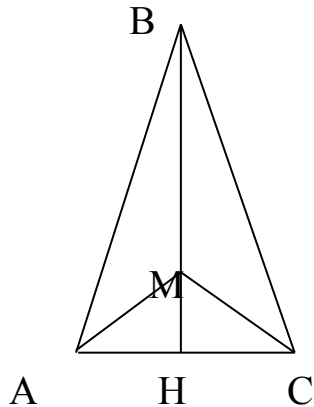
Какие соотношения можно применить к треугольнику такого вида?

Составьте отношения длин отрезков.

Закончите решение задачи (*регламент времени* $_{24} 4$ мин.).

Отрезок как элемент произвольного треугольника - (обобщенная) теорема синусов или косинусов

4. На высоте ВН равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) взята точка М так, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC$. Угол при основании треугольника равен α ($\alpha > 30^\circ$). В каком отношении точка М делит высоту?



Хотя в данной задаче сформулировано требование найти отношения длин отрезков, ее легко можно свести к рассматриваемому типу задач – найдем длину каждого из отрезков и составим их отношение.

Рассмотрим МН как элемент треугольника АМН. Так как $\angle AMC = 120^\circ$ (это следует из условия задачи), то $\angle AMH = 60^\circ$ и $\angle MAH = 30^\circ$. Значит, по свойству прямоугольного треугольника с углом 30° , $MH = AM/2$.

Рассмотрим ВМ как элемент треугольника АВМ, к которому применим теорему синусов:

$$\frac{BM}{\sin \angle BAM} = \frac{AM}{\sin \angle ABM}, \quad \frac{BM}{\sin(\alpha - 30)} = \frac{AM}{\sin(90 - \alpha)}.$$

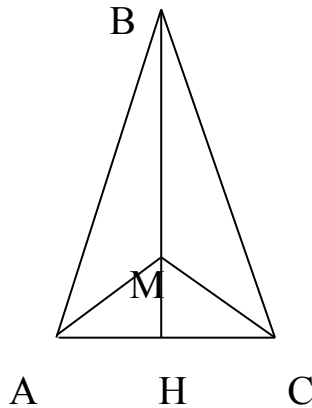
Откуда

$$BM = AM \cdot \frac{\sin(\alpha - 30)}{\cos \alpha}.$$

При составлении отношения длин отрезков длина АМ сократится и получится требуемое соотношение.

**Отрезок как элемент произвольного треугольника - (обобщенная)
теорема синусов или косинусов**

4. На высоте BH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) взята точка M так, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle AMC$. Угол при основании треугольника равен α ($\alpha > 30^\circ$). В каком отношении точка M делит высоту?



Как догадаться:

Поскольку отношение чаще всего находится из подобия треугольников, а подобных треугольников нет, поэтому непосредственное вычисление.

Фрагмент заполнения таблицы

	Основные типы	
	Нахождение длины отрезка	Нахождение величины угла
Пути поиска решения	Рассмотреть отрезок как элемент прямоугольного треугольника и применить теорему Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла	
	Рассмотреть отрезок как элемент произвольного треугольника - (обобщенная) теорема синусов или косинусов	

Отрезок как элемент произвольного треугольника

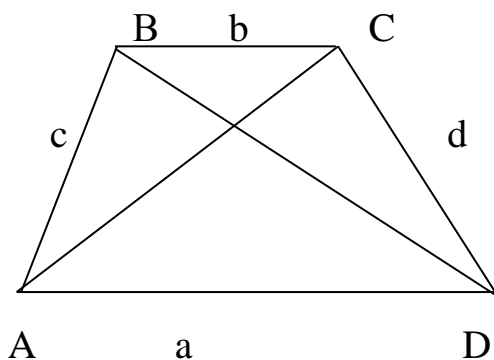
5. По основаниям a и b и боковым сторонам c и d трапеции **определить ее диагонали.**
(Требование: найти длины отрезков)

Задание:

1. Выделить условие и требование.
2. Построить чертеж, на котором отметить условие и требование задачи (*регламент времени 2 мин.*)

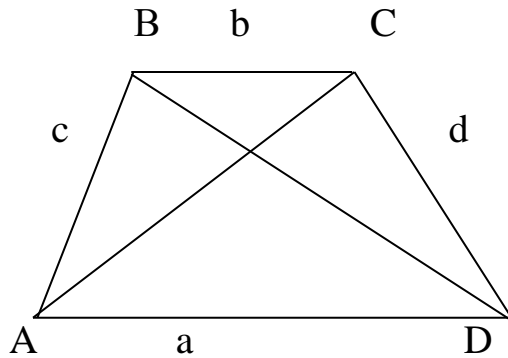
Отрезок как элемент произвольного треугольника

5. По основаниям a и b и боковым сторонам c и d трапеции определить ее диагонали.



Отрезок как элемент произвольного треугольника

5. По основаниям a и b и боковым сторонам c и d трапеции определить ее диагонали.



Ответьте на следующие вопросы и выполните задания:

Элементом какого треугольника является диагональ AC?

Определите его вид.

Какие соотношения можно применять для этого треугольника?

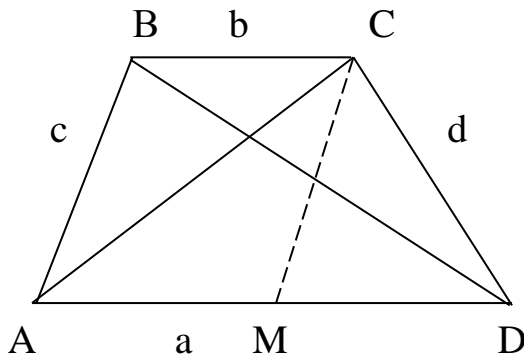
Элементом какого(их) треугольников является угол(лы) трапеции?

Какое соотношение можно применить к треугольнику такого вида?

Есть ли такой треугольник, в котором его элементами являются данные в условии задачи? Закончите решение задачи (*регламент времени 4 мин.*).

Отрезок как элемент произвольного треугольника - (обобщенная) теорема синусов или косинусов

5. По основаниям a и b и боковым сторонам c и d трапеции определить ее диагонали.



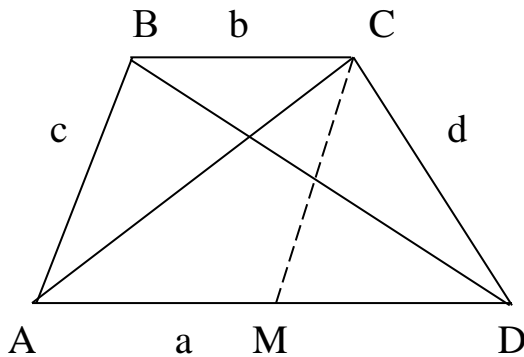
Рассмотрим диагональ AC как элемент треугольника ACD и применим к нему теорему косинусов: $AC^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos ADC$ (*). Но так как угол ADC неизвестен, рассмотрим его в качестве угла такого треугольника, стороны которого известны или легко находятся. На рисунке такого треугольника нет, поэтому выполним дополнительное построение: проведем CM параллельно AB .

Тогда в треугольнике CMD все стороны известны. Применяя к нему теорему косинусов, выразим косинус угла D и подставим в полученное выражение (*). Найдем $AC^2 = ab + \frac{ac^2 - bd^2}{a-b}$.

Аналогично находится длина отрезка BD .

**Отрезок как элемент произвольного треугольника - (обобщенная)
теорема синусов или косинусов**

5. По основаниям a и b и боковым сторонам c и d трапеции определить ее диагонали.

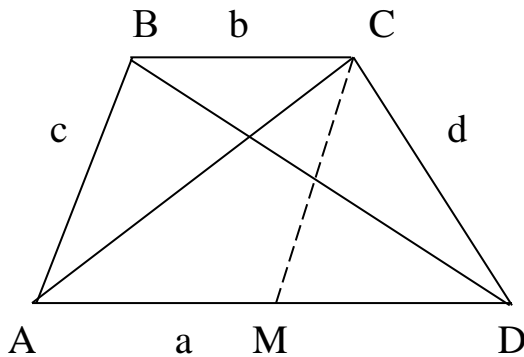


Как догадаться:

Запоминаем приемы
дополнительного построения
в трапециях: проведение
отрезка, параллельного одной
из боковых сторон, или
параллельного одному из
оснований

**Отрезок как элемент произвольного треугольника - (обобщенная)
теорема синусов или косинусов**

5. По основаниям a и b и боковым сторонам c и d трапеции определить ее диагонали.



Задание:

найти в таблице теоретический материал, используемый в решении (в случае отсутствия — дополнить таблицу)

Отрезок как элемент произвольного треугольника

6. Найти медиану треугольника по известным его сторонам.

Задание:

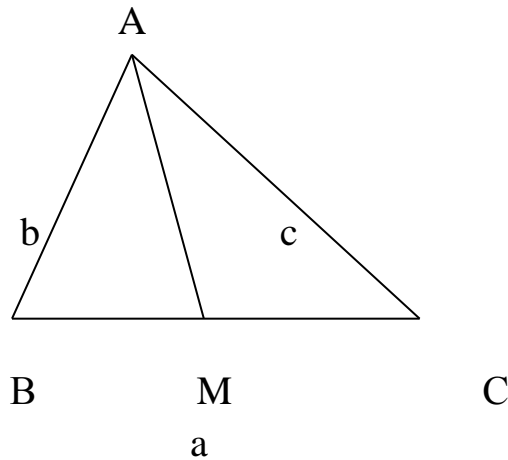
1. Выделить условие и требование.

2. Построить чертеж, на котором отметить условие и требование задачи

(регламент времени 4 мин.)

Отрезок как элемент произвольного треугольника

6. Найти медиану треугольника по известным его сторонам.

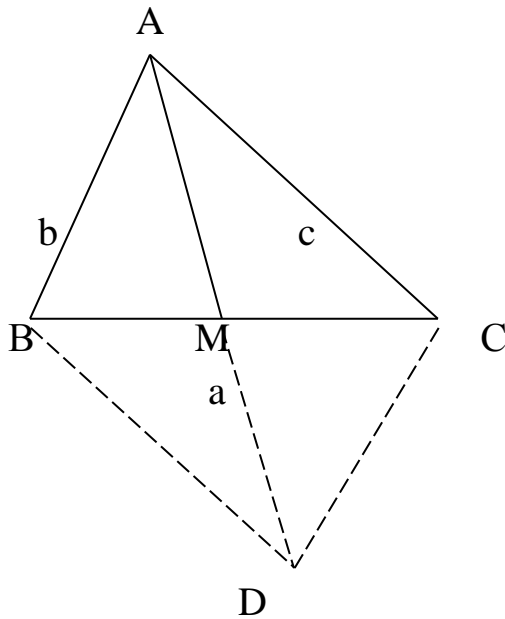


Ответить на вопрос:

Медиана делит сторону пополам, в каких утверждениях (свойствах, признаках) встречаются середины, половины отрезков?

Отрезок как элемент произвольного треугольника

6. Найти медиану треугольника по известным его сторонам.



Выполним дополнительное построение – удвоим медиану (достроим до параллелограмма). По свойству параллелограмма (сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов длин его сторон) выразим длину AD:

$$AD = \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

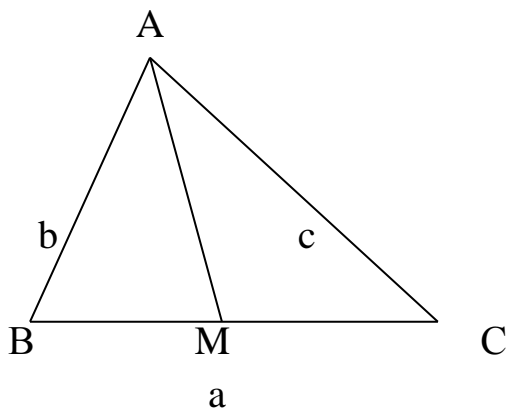
и, следовательно, медиану треугольника как половину диагонали.

Фрагмент заполнения таблицы

	Основные типы	
	Нахождение длины отрезка	Нахождение величины угла
Пути поиска решения	Рассмотреть отрезок как элемент прямоугольного треугольника и применить теорему Пифагора или формулы, содержащие тригонометрические функции угла	
	Рассмотреть отрезок как элемент произвольного треугольника - (обобщенная) теорема синусов или косинусов	
	Рассмотреть искомый отрезок как элемент четырехугольника (в частности, параллелограмма) и применить к нему утверждения (воспользовавшись свойствами), связывающие его элементы,	
	Рассмотреть отрезок, в 2 раза больший данного	

Отрезок как элемент произвольного треугольника

Дом. задание: Найти высоту и биссектрису треугольника по известным его сторонам.



Федеральный проект
ВОЛОНТЁРЫ
ПРОСВЕЩЕНИЯ



УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ОСНОВАН В 1930 ГОДУ

uspu.ru